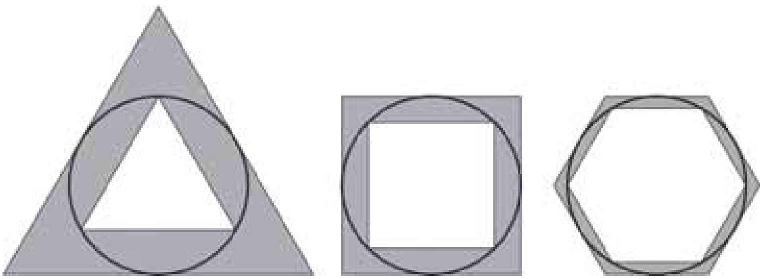
Jednak pierwsze systematyczne obliczenia π są dziełem Archimedesa. Zauważył on rzecz następującą: jeśli narysuje się dwa regularne wielokąty, na przykład dwa kwadraty, w ten sposób, że mniejszy wierzchołkami swoich kątów leży dokładnie na okręgu, większy zaś swoimi bokami dotyka tegoż okręgu, opisując go od zewnątrz, to jeśli coraz bardziej zwiększa się liczbę kątów tych figur, „wciskając" w nie okrąg, różnica między figurą zewnętrzną a wewnętrzną staje się coraz mniejsza; wówczas obliczenie średniej z obwodów tych dwóch figur pozwala coraz bardziej zbliżyć się do wartości π. Na rysunkach wygląda to tak: szary „obszar błędu" zmniejsza się wraz ze zwiększającą się liczbą kątów.



Najprostszym sposobem obliczenia π byłoby więc obliczenie obwodu wielokąta o jak największej liczbie kątów. Niestety, nie jest to takie proste – dla większości z nich nie ma prostych algebraicznych wzorów, nie obejdzie się więc bez sinusów i cosinusów.

Jednak już Archimedes wiedział, że jeśli zna się obwód wielokąta o liczbie kątów n, dość łatwo można obliczyć obwód wielokąta o liczbie kątów $2n$. Trzeba tylko pobawić się trochę twierdzeniem Pitagorasa.

Jeśli spojrzeć na okrąg o promieniu 1, to jego obwód wynosi 2π. Ponieważ znana jest długość boków, a tym samym obwód n-wielokąta, to każdy z jego wewnętrznych kątów trzeba podzielić jeszcze raz na dwa, tak, aby otrzymać wielokąt o liczbie boków $2n$.

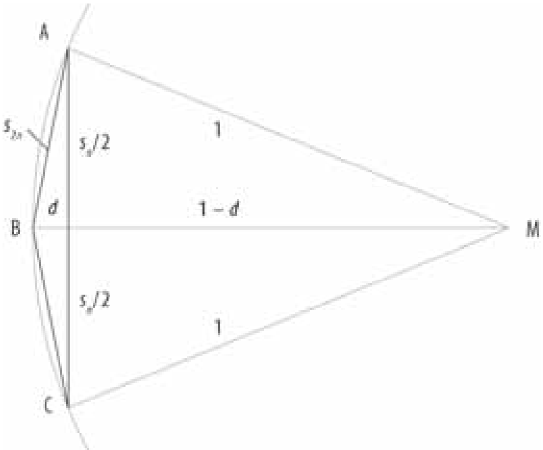


Figura taka przypomina latawiec, w którego środku promień MB i odcinek AC przecinają się pod kątem prostym. Niewiadoma, której szukamy, to s_{2n}. Odcinek ten jest dłuższym bokiem małego trójkąta prostokątnego, w związku z czym zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa

$$(s_{2n})^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + d^2$$

Wartość s_n powinna być znana, ale jaka jest wartość d? Wartość ta występuje także we wzorze dotyczącym dużego trójkąta, jako $1 - d$, który oprócz tego zawiera jedynie znane wartości

$$1 = (1 - d)^2 + \left(\frac{s_n}{2}\right)^2$$

Jeśli pomnożyć to wszystko i trochę poprzenosić, to otrzymamy

$$d^2 - 2d + \frac{s_n^{\ 2}}{4} = 0$$

To zaś można rozwiązać ze względu na *d* sposobem przedstawionym na s. 225.

$$d_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{s_n^{\ 2}}{4}}$$

Równanie to ma dwa rozwiązania, jednak nas interesuje tylko to ze znakiem minus, ponieważ *d* w sposób oczywisty jest mniejsze niż 1. Wzór robi się coraz bardziej skomplikowany, ale proszę jeszcze trochę wytrzymać. W równaniu na s_{2n} występuje d^2, czyli

$$d^2 = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{s_n^{\ 2}}{4}}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{s_n^{\ 2}}{4}} + 1 - \frac{s_n^{\ 2}}{4}$$
$$= 2 - 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{s_n^{\ 2}}{4}} - \frac{s_n^{\ 2}}{4}$$

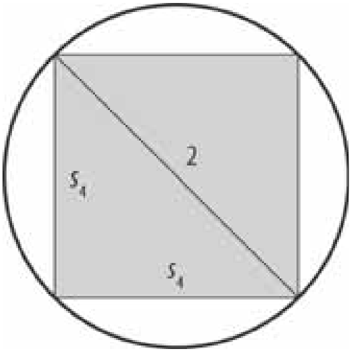
Na szczęście wszystko się upraszcza, kiedy zastosujemy wzór na s_{2n}

$$s_{2n}^{\ 2} = \frac{s_n^{\ 2}}{4} + d^2 = \frac{s_n^{\ 2}}{4} + 2 - 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{s_n^{\ 2}}{4}} - \frac{s_n^{\ 2}}{4}$$
$$= 2 - 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{s_n^{\ 2}}{4}} = 2 - \sqrt{4 - s_n^{\ 2}}$$

lub inaczej

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^{\ 2}}}$$

Cały czas mówimy, że wartość s_n jest znana. Zacznijmy więc od jakiegoś n-wielokąta, w którym łatwo obliczyć s_n, na przykład dla n równego 4.



Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa

$$s_4^2 + s_4^2 = 2^2$$

to znaczy

$$s_4^2 = 2$$
$$s_4 = \sqrt{2}$$

Połowa obwodu tego kwadratu jest naszym pierwszym przybliżeniem π, a tę uzyskuje się, mnożąc jeden bok przez 2

$$U_4 = 2 \cdot \sqrt{2} = 2{,}828\ldots$$

Prawda, niezbyt to dokładne przybliżenie. Ale teraz, krok po kroku, możemy wyznaczać wielkości s_8, s_{16} i tak dalej, i podstawiać je:

$$U_8 = 4 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 3{,}061\ldots$$

$$U_{16} = 8 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = 3{,}121\ldots$$

$$U_{32} = 16 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = 3{,}136\ldots$$

Prosty wzorzec! Pod tym „pierwiastkiem łańcuchowym" mamy coraz więcej dwójek, a wynik jest coraz większy, choć pozostaje mniejszy niż π (ponieważ wielokąt znajduje się wewnątrz okręgu), jednocześnie jednak coraz bardziej zbliżamy się do wartości π. W takim wypadku mówi się: wartość tego równania dąży do π. Teoretycznie rzecz biorąc, wystarczy tylko liczyć coraz dalej, aby uzyskać dowolną liczbę cyfr po przecinku w π. Niestety, tylko teoretycznie. Gdyby bowiem spróbować wrzucić ten wzór do tabeli w Excelu, to zobaczylibyśmy, że najpierw jesteśmy coraz bliżej prawidłowej wartości, w którymś momencie nawet do ośmiu miejsc po przecinku. Jednak potem wynik liczbowy stawałby się większy niż „prawdziwa" π, co jest właściwie niemożliwe; raz wartość ta dochodzi nawet do 4, a potem nagle spada do 0. Co się dzieje? Boki n-wielokąta stają się coraz krótsze. W wyrazie

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^{\,2}}}$$

pod pierwiastkiem znajduje się liczba tylko odrobinę mniejsza niż 4. W związku z tym cały wyraz zbliża się coraz bardziej do 0. I to się zgadza, w końcu boki są coraz krótsze, mnożymy je przez coraz większą liczbę. Jednak w pewnym momencie komputer, który oblicza wszystko tylko do pewnego miejsca po przecinku, zaczyna zaokrąglać te wartości do zera. I wtedy oczywiście można mnożyć, ile się chce, zero pozostanie zerem.

Istnieją ciągi dążące do π, które nie są tak wrażliwe na zaokrąglanie, jak ten. Ale było, nie było – za pomocą bardzo prostych środków matematycznych udało nam się obliczyć π do ośmiu miejsc po przecinku! Liczbę π można przedstawić także jako nieskończonuy szereg, czyli jako sumę nieskończonej liczby składników. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) znalazł następujący szereg:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots$$

A więc odwrotności wszystkich liczb nieparzystych, opatrywanych zamiennie znakiem plus i znakiem minus. (To bardzo ważne – gdyby wszystkie miały znak plus, ich suma rosłaby do nieskończoności!).

Ten, kogo dziwi ten sposób przedstawienia π, zdziwi się jeszcze bardziej, gdy zobaczy, co wykombinował Leonhard Euler (1707–1783) – wykazując przy okazji dziwny związek między π a liczbami pierwszymi.

Euler określił powyższy szereg jako *A*. Następnie podzielił wszystko przez 3

$$\frac{1}{3}A = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + \frac{1}{27} - \frac{1}{33} + \frac{1}{39} - \frac{1}{45} + \ldots$$

Teraz trzeba dodać obydwa ciągi – i widać, że wszystkie elementy dolnego ciągu pojawiają się w górnym, tylko z odwrotnym znakiem. Odpadają więc te elementy ciągu, których mianownik jest podzielny przez 3

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot A = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} - \frac{1}{23} \ldots$$